无向图

图与图形

定义

图可以由三元组表示：$G=<V_G,E_G,\varphi>$（节点、边、映射）。其中φ是从E_G到$V_G\times V_G$的一个映射。

简单图

- **重边**：φ不是一个单射函数，即有两条边所连接的顶点相同。
- **自环**：对于任意的$e_i\in E_G$，如果有$\varphi(e_i)=v_i,v_i$，那么e_i是自环。
- **简单图**：没有重边和自环的图叫做简单图。

图的顶点

1. 顶点的度数
    - $d_G(v)$:与顶点v关联的边的数量（度）
    - $\Delta(G)$:图中度数最大的顶点的度数
    - $\delta(G)$:图中度数最小的顶点的度数
2. 顶点度数的数值特征
    - 图中所有顶点的度数之和是**偶数。**
    - $\sum_{i=1}^{n}d(v_i)=2m$，其中m表示图中边的数量。
    - 具有奇数度数的顶点数量必定是偶数

子图

对于$G=<V,E>,G'=<V',E'>$,如果$V'\subseteq V,E'\subseteq E$，那么$G'$称为$G$的子图。

- **真子图**：$V'\subset V,E'\subset E$。
- **生成子图**：$V'=V$。

完全图

任意两个顶点都是相邻的图。

- 对于给定的n，只有一个完全图，记作K_n。
- 在K_n中对于任意一个顶点v，有$d(v)=n-1$。
- K_n中的边数正好是$\frac{n(n-1)}{2}$。
- 如果G是一个简单图，那么G的边数m满足$m\leq\frac{n(n-1)}{2}$
- **补图**：G与其补图具有相同的顶点集，并且边集恰好构成完全图边集的一个划分。

商图

对于给定的一个等价关系，商图G/H的顶点为G中的等价类。当且仅当两个等价类代表的顶点在原图G中相邻，则两个等价类之间有一条边。

正则图

每个顶点的度数都相同的图，当度数均为k时，也可称为$k-$正则图。

路径

- **简单路径**：对于$v_0 e_1 v_1 \dots v_{k-1} e_k v_k$，满足$\forall i, j$若$i \neq j$，则$v_i \neq v_j$。
- **回路**：起点和终点相同的路径
- **极大路径**：设一条路径的两个端点是u和v，如果u和v都与路径P之外的顶点不相邻，则称P为一条极大路径。

性质

- **简单路径的存在性**：在G中如果存在一条$(u, v)-$路径，那么一定存在一条$(u, v)-$简单路径。
- **最小顶点度数与回路**：设G是一个简单图，如果$\delta(G) = k, (k > 1)$，那么G中必定存在一个长度至少为$k+1$的简单回路。

可达性

定义：**可达关系**$R_C \subseteq V_G \times V_G$。（表示可连通） 其中对于任何顶点$v$，存在一条从$v$到$v$长度为0的路径。

- R_C是一个等价关系，等价类称为图G的一个**连通分量**。
- **连通分量**是一个连通的最大子图，具有极大性和唯一性。包含顶点与边。
- R_C是V_G上邻接关系R_a的传递闭包。
- 如果G中有且仅有一个连通分量，则G是一个连通图。

补图的连通性

设G是一个简单图，那么G或G的补图G'之中必有一个是连通图。

欧拉路径与欧拉回路

定义

欧拉路径：经过G中每条边恰好一次的路径。 **欧拉回路**：经过G中每条边恰好一次的回路。 **欧拉图**：包含欧拉回路的图。 **半欧拉图**：包含欧拉路径但不包含欧拉回路的图。

三个等价命题

对于一个非平凡连通图G，以下三个命题等价：

1. G是欧拉图
2. 对于G中的任意顶点v，$d(v)$是偶数
3. G中的所有边组成一个或多个简单回路，且这些回路之间没有公共边 注：当有且只有两个奇数度数的顶点时，该图是半欧拉图。

Fleury 算法

在绘制欧拉图的时候，删除所有经过的边后，剩余的边必须属于同一个连通分量。

哈密尔顿路径和哈密尔顿回路

哈密尔顿路径：恰好包含G中的所有顶点有且仅有一次。 **哈密尔顿回路**：起点和终点是同一个顶点的哈密尔顿路径。 **哈密尔顿图**：包含哈密尔顿回路的图。 **半哈密尔顿图**：包含哈密尔顿路径，但不包含哈密尔顿回路的图。

必要条件

设G是一个哈密尔顿图，则对于V_G的任何非空子集V_1，在$G - V_1$中的连通分量数量不大于V_1中顶点的数量。

顶点度数与连通性

如果任意一对顶点的度数之和足够大，则图必须是连通的。

- 条件(*)：若$d(u) + d(v) \geq n - 1$ (其中$n = |VG|$)，那么G是连通的。

极大路径转化为回路

如果图G满足条件(*)，并且设$\mathit{\Gamma} = v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k$是一个不包含$G$中所有顶点的极大路径。那么路径$\mathit{\Gamma}$上的所有顶点都位于一个简单回路上。 并且条件(*)是半哈密尔顿图的**充分条件**。 条件：$d(u) + d(v) \geq n$ (其中$n = |VG|$)是哈密尔顿图的**充分条件**