

基本结构

集合

(对象的一个**无序**的聚集)

相关定义

- **基数**: 描述集合的大小, 即集合中的元素个数。符号: $|A|$
 - $|\{1, 2, 3\}| = 3$
 - $|\emptyset| = 0$
 - $|\{\emptyset\}| = 1$
- **幂集**: 一个集合所有子集的集合。记作 $P(A)$
 - 一个有 n 个元素的集合的幂集的基数为 2^n
- **集合的性质**
 - **可数性**: 集合是对应某个序列的集合 (集合中的成员能用列举的方法排列)。
 - **有限性**: 集合中的个数是有限的。
- **元组**: 有序集合
 - **有序2-元组**称为序偶。(只有两个元素的元组)
- **笛卡尔积**: 两个集合 A 和 B 的笛卡尔积, 是序偶 (a, b) 的集合, 其中 $a \in A, b \in B$, 记作: $A \times B$
 - 若 $A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\}$ 则:
$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$
 - 笛卡尔积 $A \times B$ 的子集 R 称为集合 A 到集合 B 的关系
- **真值集**: U 中使 $P(x)$ 为真的元素的集合。
- **差集**: $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \bar{B}$
- **对称差**: $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$
- **集合的特征函数**
 - $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$
 - **运算性质**
 - $f_{A \cap B} = f_A f_B$
 - $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_{AB}$
 - $f_{A \oplus B} = f_A + f_B - 2f_{AB}$
- **交集和并集的拓展**
 - $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

$$\circ \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

注意点

- 空集不同于包含空集的集合: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$
- 子集的证明: 对于 $\forall x \in A$, 都有 $x \in B$, 则有 $A \subseteq B$ 。
- 笛卡尔积不具有互换性: $A \times B \neq B \times A$
- 有理数是可数集, 实数是不可数集。

序列

(元素的**有序**列表)

1,2,3,5,8(有限)

1,3,9,27,81,... (无限: 无穷序列) (可以没有规律)

相关定义

- **几何级数**: 等比数列
- **算数级数**: 等差数列
- **斐波拉契数列**: $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
 - $|f_{n-1}^2 - f_n f_{n-2}| = 1$
 - $|f_n f_{n-1} - f_{n+1} f_{n-2}| = 1$
 - 两个较大的斐波那契数列之比接近黄金分割比例。
- **字符串**: 有限集合(字母表)中的有限字符序列
 - **空串**: 记为 λ 或 Λ , 长度为0
 - **长度**: 字符串中元素的个数
 - A^* : 所有由 A (字符集合) 中元素生成的有效序列的集合。
 - A^* 中的元素成为 A 的词或串
 - **链接** \circ : 假设 A 是集合, $w_1 = s_1 s_2 \dots s_n, w_2 = t_1 t_2 \dots t_m$ 都是 A^* 中的元素, 则 w_1 和 w_2 的连接为: $w_1 \circ w_2 = s_1 s_2 \dots s_n t_1 t_2 \dots t_m \circ$
- **正则表达式**: 由 A 中的元素和符号: $(,), \vee, *, \wedge$ 按一定规则构造的字符串
 - **正则集合(正则子集)**: A 的每个正则表达式联系着 A^* 的一个正则子集。
 - **求解法则**: 如果 α, β 分别对应 A^* 的子集 M 和 N 的正则表达式
 - $\alpha\beta = M \cdot N = \{s \circ t | s \in M, t \in N\}$, 表示 M 中的串和 N 中的串的所有连接的集合。
 - $\alpha \vee \beta = M \cup N$ 。
 - $(a)^* = M^*$

注意点

- 元组的本质是集合，外侧有花括号。序列外侧没有花括号。
- 序列里的项可以重复、可以无规律，但是是有顺序的。

数论

研究整数的性质

相关定义

- **整除**：对于任意两个整数 a 和 b 且 $a \neq 0$ ，如果存在整数 c 使得 $b = ac$ ，则 a 整除 b ，记作 $(a | b)$ 。如： $3 | 12, 3 | -15$ 。称： b 是 a 的一个**倍数**， a 是 b 的一个**约数**或**因子**。
 - **整除的性质** 假设 a, b, c 是整数且 $a \neq 0$ ，则：
 - 如果 $a | b$ 且 $a | c$ 。则对于 $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ ，有 $a | (xb + yc)$ 。
 - 若 $a | b$ ，则 $a | (bc)$ 。
 - 若 $b \neq 0, a | b$ 且 $b | c$ ，则 $a | c$ 。
 - 若 $b \neq 0, a | b$ 且 $b | a$ ，则 $a = \pm b$
- **同余**：设 n 是整数， a 和 b 是整数，如果 $n | (a - b)$ ，则称 a 模 n 同余于 b ，或 a 与 b 模 n 同余，记作 $a \equiv b \pmod{n}$ ， n 称为**模**。
 - **同余的性质** 若 $a \equiv b \pmod{n}, c \equiv d \pmod{n}$ ，则：
 - $a \pm c \equiv (b \pm d) \pmod{n}$
 - $ac \equiv (bd) \pmod{n}$
- **最大公因子（公约数）**：记作 $GCD(a, b)$ 。
 - **最大公因子的性质**
 - **线性合成**：设 $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ，则： $(\exists s, t \in \mathbb{Z}^+)(GCD(a, b) = sa + tb)$ 。
 - **辗转相减**：设 $a, b \in \mathbb{Z}^+, a < b$ ，则 $GCD(a, b) = GCD(a, b - a)$
 - **辗转相除**：设 $a, b \in \mathbb{Z}^+, a < b$ ，则 $GCD(a, b) = GCD(b, a \bmod b)$ **欧几里得算法**
- **互质**：如果整数 a 和 b 的最大公因子为1，则称 a 与 b 互质。
- **最小公倍数**：记作 $LCM(a, b)$ 。
- **裴蜀等式**：对于不全为0的整数 a, b 和 d ，方程 $sa + tb = d$ 存在整数解 s 和 t 当且仅当 $GCD(a, b) | d$ 。
 - 方程 $sa + tb = d$ 称为裴蜀等式。
- **费马小定理**：
 - 假设 p 是素数，对于任意整数 a ，有： $a^p \equiv a \pmod{p}$
 - 假设 p 是素数，整数 a 和 p 互素，有： $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
- **欧拉函数**： $\varphi(n)$ 是小于 n 的正整数中与 n 互素的数的数目。

- 若 p 是素数, 则 $\varphi(p) = p - 1$
- 若 p 和 q 是两个不同的素数, 则 $\varphi(p \times q) = (p - 1)(q - 1)$
- 若 n 和 a 是互素的正整数, 则有 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

注意点

- 余数始终为正。
- 定理: 设 $a \in \mathcal{Z}^+$, 则:
 - $GCD(0, a) = a$ (0是所有数的倍数)
 - $GCD(1, a) = 1$
 - $LCM(1, a) = a$
- 设 $a, b \in \mathcal{Z}^+$, 则 $GCD(a, b) \cdot LCM(a, b) = ab$

布尔矩阵

所有元素为1 或 0 的矩阵。

相关运算

- 取反 (补): $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, 则 $\bar{A} = [1 - a_{ij}]_{m \times n}$
- 并: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, 则: $A \vee B = [a_{ij} \vee b_{ij}]_{m \times n}$
- 交: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, 则: $A \wedge B = [a_{ij} \wedge b_{ij}]_{m \times n}$
- 布尔积: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times r}$, 则: $A \odot B = C$, 其中

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若存在 } k, 1 \leq k \leq n, \text{ 使得 } a_{ik} = 1 \text{ 且 } b_{kj} = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

- 相关运算
 - $(A \vee B)^T = A^T \vee B^T$
 - $(A \wedge B)^T = A^T \wedge B^T$
 - $(A \odot B)^T = B^T \odot A^T$