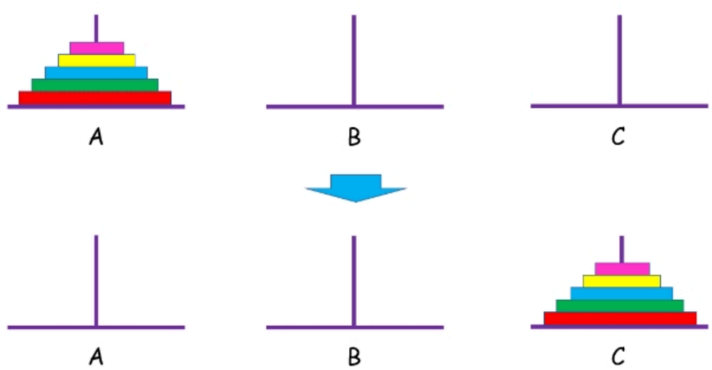
递推求解

经典例子

- **汉诺塔**：
  有 A,B,C 三根柱子，A 上面有 n 个盘子，我们想把 A 上面的盘子移动到 C 上，但是要满足以下三个条件：

  1. 每次只能移动一个盘子;
  2. 盘子只能从柱子顶端滑出移到下一根柱子;
  3. 盘子只能叠在比它大的盘子上。

  思路：把$n-1$个放到B位置，把最大的放到C位置，再把$n-1$个放到C位置。
  递推公式：$H_n = 2H_{n-1} + 1$
- **计算比特串**
  对不含2个连续0的n位二进制位串数个数，找出递推关系和初始条件。
  思路：如果a_n的末尾为1，则前面$n-1$项要满足不含两个连续0，有a_{n-1}个。如果a_n的末尾为0，则第$n-1$位一定为1，则前$n-2$位要满足该要求，有a_{n-2}个。
  递推公式：$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

常见序列的递推公式

线性齐次递推关系

一个常系数k阶线性齐次关系递推关系形如：

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

的递推关系，其中$c_1, c_2, ... c_k$为实数，且$c_k \neq 0$。

- *k阶*：a_n是用之前的前k项来表示的

求解递推关系：

将所有的a_k转化为r^k，得到**特征方程**:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

- 对于2阶的线性齐次关系：$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$
  - 如果有**两个不相等的根**r_1, r_2，那么递推关系为：$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$
  - 如果有**一个重根**r_0，那么递推关系为：$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$
- 对于任意阶数的线性齐次方程：$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$
  - 如果**有k个不同的根**$r_1, r_2, \ldots, r_k$，那么递推关系为：$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + a_k r_k^n$。
  - 如果**有t个不同的根**，每个根的重数分别为$m_1, m_2, \ldots, m_t$，那么递推关系为：$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \cdots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \cdots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n + \cdots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \cdots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n$

常系数线性非齐次递推关系

一个常系数线性非齐次递推关系形如：$an = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$，其中$F(n)$是一个只依赖于n且不等于0的函数。

求递推关系：

每个解都是$\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$的形式，其中$\{a_n^{(h)}\}$是相伴的线性齐次递推关系的解，$\{a_n^{(p)}\}$是线性非齐次递推关系的一个特解。

分治算法和递推求解

将一个大小为n的问题分解成a个子问题

- 每个子问题的大小为$\frac{n}{b}$
- 假设$g(n)$是算法处理步中需要额外操作的量
  有：$f(n) = af(\frac{n}{b}) + g(n)$

时间复杂度计算

- 对于$f(n) = af(\frac{n}{b}) + c$，如果n能被b整除时，$a \geq 1$，b是大于1的整数，c是正实数，有：

$$f(n) is \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & if \;\; a > 1 \\ O(\log n) & if \;\; a = 1 \end{cases}$$

- 对于$f(n) = af(\frac{n}{b}) + cn^d$，k是一个正整数，b是大于1的整数，c和d是实数，满足c是正且b、d是非负，有：

$$f(n) is \begin{cases} O(n^d) & if \;\; a < b^d \\ O(n^d \log n) & if \;\; a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & if \;\; a > b^d \end{cases}$$