偏序

等价关系

满足**自反**、**对称**、**传递**。 若$(a,b)\in R$，称a等价b，记为$a\sim b$

相容关系

满足**自反**、**对称**。 **相容类**：假设R是A上的相容关系，若$C\subseteq A$，且对于C中任意两个元素a_1,a_2均有a_1Ra_2，则称C是由R产生的**相容类**。 **最大相容类**：不真包含于任何其他相容类，记为C_R。 **完全覆盖**：集合A中关于相容关系R的最大相容类的集合。

偏序关系

基本性质

满足**自反**、**反对称**、**传递**，记作$\preccurlyeq$。 $(a,b)\in\preccurlyeq$记为$a\preccurlyeq b$，读作**a对b有偏序关系**。 集合A和偏序关系R一起称为**偏序集**，记作(A,R)。 偏序集(A,R^{-1})为(A,R)的**对偶**，偏序R^{-1}为偏序R的**对偶**。

积偏序

有偏序集$(A,\preccurlyeq)$和$(B,\preccurlyeq)$，则$(A\times B,\preccurlyeq)$也是偏序集，称为**积偏序**。 定义为：若在A中$a\preccurlyeq a'$，B中$b\preccurlyeq b'$，则$(a,b)\preccurlyeq(a',b')$。 **字典顺序**：在积偏序$(A\times B,\preccurlyeq)$中，如果$(a_1,b_1)\prec(a_2,b_2)$则$a_1\prec a_2$或$(a_1=a_2)\wedge(b_1\prec b_2)$。

同构偏序

如果对于$(A,\preccurlyeq)$和$(A',\preccurlyeq)$，存在$f:A\to A'$是A与A'之间的一一对应。
$(\forall a,b\in A)\wedge(a\preccurlyeq b)\Leftrightarrow f(a)\preccurlyeq f(b)$，则函数$f$为从$(A,\preccurlyeq)$到$(A',\preccurlyeq)$的一个**同构**，且$(A,\preccurlyeq)$和$(A',\preccurlyeq)$为**同构的偏序集**。

哈斯图

盖住关系：y盖住x等价于:$x\prec y\wedge\neg\exists z(z\in A\wedge x\prec z\prec y)$。

四元四界

设偏序集$(A,\preccurlyeq)$, $B\subseteq A, y\in B$

- **最小元**：$\forall x(x\in B\to y\preccurlyeq x)$，则$y$为$B$的最小元（要求对于全部元素都可比）
- **最大元**：$\forall x(x\in B\to x\preccurlyeq y)$，则$y$为$B$的最大元 （要求对于全部元素都可比）
- **极小元**：$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\to x=y)$，则$y$为$B$的极小元
- **极大元**：$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\to x=y)$，则$y$为$B$的极大元
- **上界**：$\forall x(x\in B\to x\preccurlyeq y)$，则$y$为$B$的上界
- **下界**：$\forall x(x\in B\to y\preccurlyeq x)$，则$y$为$B$的下界
- **上确界**：令$C=y|y$为B的上界，C中的最小元为B的上确界
- **下确界**：令$C=y|y$为B的下界，C中的最大元为B的下确界

全序关系

对于偏序集$(A, \preccurlyeq)$，其中任意两个元素都可比。 **拓扑排序**：每次选择一个极小元并输出，从而形成全序。

良序关系

对于偏序集$(A, \preccurlyeq)$，任何一个非空子集都有最小元素。

格

对于偏序集$(L, \preccurlyeq)$，满足：

- $\forall x, y \in L$，集合x, y存在最小上界，记作$x \vee y$.
- $\forall x, y \in L$，集合x, y存在最大下界，记作$x \wedge y$.

基本性质

- $a \preccurlyeq a \vee b$, $b \preccurlyeq a \vee b$.
- 如果$a \preccurlyeq c, b \preccurlyeq c$，那么$a \wedge b \preccurlyeq c$
- $a \wedge b \preccurlyeq a$, $a \wedge b \preccurlyeq b$
- 如果$c \preccurlyeq a, c \preccurlyeq b$，那么$c \preccurlyeq a \wedge b$

代数性质

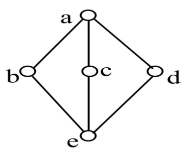
- 幂等律：$a \vee a = a \wedge a = a$
- 结合律：$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$； $\quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
- 吸收率：$a \vee (a \wedge b) = a$； $\quad a \wedge (a \vee b) = a$
- 伪传递性：$a \preccurlyeq b, c \preccurlyeq d \to (a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d), (a \vee c \preccurlyeq b \vee d)$
- 分配不等式：$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ； $\quad (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \preccurlyeq a \wedge (b \vee c)$

子格

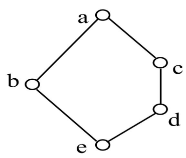
S是L的一个非空子集，若S对于$\wedge$和$\vee$封闭，则S是L的一个**子格**（上下确界都在S中）。

特殊格

1. **链式格**：任意两个元素都可以比较，即全序



2. **菱形格**：$b \vee (c \wedge a) = (b \vee c) \wedge a = a$
3. **五边形格**：不满足分配律的最简单格。 $c \vee (b \wedge d) = c \vee e = c \neq (c \vee b) \wedge d = a \wedge d = d$



4. **分配格**：满足分配律的格 特性：**当且仅当**它不包含任何同构于菱形格或五边形格的子格。
5. **有界格**：具有最大元素1和最小元素0 **补元**：对于有界格L中任意的元素a，若存在元素b，使得$a \vee b = 1$且$a \wedge b = 0$，则b为a的补元。（补元具有**唯一性**）