

函数

是非空集A到B的关系，也可以称作**映射或变换**

记为 $f : A \rightarrow B$

基本概念

- A为函数的定义域，记为 $\text{dom} f = A$
- $f(A)$ 为函数f的值域，记为 $\text{ran} f = \{f(x) | \forall x \in A\}$
- B为函数f的陪域

特点

- 定义域中的每一个元素都必须是f的有序对(a, b)的第一分量。
- $\forall x \in A, f(x)$ 的值唯一。

函数的个数： B^A 表示从A到B的函数的集合。

- 若有 $|A| = m, |B| = n$ ，那么 $|B^A| = n^m$

函数相等：拥有相同的定义域、陪域和有序对集合。

常见函数：

- **常函数**： $\exists c \in B, s.t. \forall x \in A, f(x) = c$ 。
- **恒等函数**： $\forall x \in A, f(x) = x$ 。
- **自然映射**：设R是A上的等价关系，令 $g : A \rightarrow A/R$ ，对 $\forall x \in A, g(x) = [x]$
- **特征函数**：对于全集U的一个子集A， $f_A : U \rightarrow \{0, 1\}$ ，且 $f_A(u_i) = \begin{cases} 1, & u_i \in A \\ 0, & u_i \notin A \end{cases}$
- **偏函数**： $A' \subseteq A, f'_A : A' \rightarrow B$
- **弱取整函数** (地板函数)： $\lfloor x \rfloor$
- **强取整函数** (天棚函数)： $\lceil x \rceil$

函数的性质

1. **满射**： $\text{ran} f = B \Rightarrow \forall b(b \in B \rightarrow \exists a(a \in A \wedge f(a) = b))$
2. **单射**： $\forall y \in \text{ran} f$ ，存在唯一的 $\forall x \in A, s.t. f(x) = y$ 。或： $\forall a \forall b(a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b))$
或 $\forall a \forall b(f(a) = f(b) \rightarrow a = b)$
3. **双射**：同时是满射和单射。(B中元素的每个入度都为1)

函数的运算

复合运算

设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 则 $g \circ f = \{(x, z) | x \in A \wedge z \in C \wedge (\exists y)(y \in B \wedge xfy \wedge ygz)\}$

。

记为 $g \circ f: A \rightarrow C \quad \forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

复合运算的性质

- $f \circ I_A = I_B \circ f = f$
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- 函数的复合运算能保持函数满射、单射、双射的性质
- 设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 则:
 - 若 $g \circ f$ 是满射, 则 g 是满射
 - 若 $g \circ f$ 是单射, 则 f 是单射
 - 若 $g \circ f$ 是双射, 则 f 是单射, g 是满射

逆运算

$f^{-1} = \{(y, x) | x \in A \wedge y \in B \wedge xfy\}$

f^{-1} 存在当且仅当 f 是双射

函数的置换

集合 A 到它自身的一个双射称作 A 的一个**置换**。

若集合 A 是含有 n 个元素的一个集合, 则 A 的不同置换数为 $n!$

循环置换: 设 b_1, b_2, \dots, b_r 是集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中 r 个不同的元素, 置换 $p: A \rightarrow A$ 定义为: $p(b_1) = b_2, p(b_2) = b_3, \dots, p(b_r) = b_1$ 且若 $x \in A \wedge x \notin \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$, 则 $p(x) = x$ 。那么称置换 p 为**长度为 r 的循环置换**。其中长度为 2 的置换称为**对换**

任意循环 (b_1, b_2, \dots, b_r) 都可以写成对换的复合 (积), 即 $b_1, b_2, \dots, b_r = (b_1, b_r) \circ (b_1, b_{r-1}) \circ \dots \circ (b_1, b_3) \circ (b_1, b_2)$ 。

- 若一个置换能表示成偶数个对换的复合, 称其为**偶置换**。
- 若一个置换能表示成奇数个对换的复合, 称其为**奇置换**。

函数的阶

描述函数在某个过程中的增长或变化速度

- 若存在常数 c 和 k 使得对所有的 $n \geq k$ 均有, $|f(n)| \leq c|g(n)|$, 则称 f 是 $O(g)$, 读作 f 是 g 的大 O 。
- 若 f 是 $O(g)$ 且 g 是 $O(f)$, 则称 f 和 g 具有相同的阶。记作 $f \Theta g$ 。其中 Θ 是一个等价关系。

Θ 的等价类

等价类由同阶的函数所组成

计算机中常见的阶: $\Theta(1) < \Theta(\lg(n)) < \Theta(n^k) < \Theta(a^n)$

函数与集合基数的关系

选取一个标准集合: $N_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, 称为 N 的截断 n 。

可数集

若 $f: N_n \rightarrow A$ 为双射函数, 则称集合 A 是可数的。

- 情况1: 有限集合
- 情况2: 基数 = $|Z^+| = |N|$ 的无限集合

集合的基数

- 与 N_n 构成双射的集合, 指派它的基数为 n
- 与 N 构成双射的集合, 指派它的基数为 \aleph_0
- 指派空集的基数为 0

集合基数的比较

- A 和 B 有相同的基数 (称 A 和 B 等势), 当且仅当从 A 到 B 有双射函数, 记为 $|A| = |B|$, 或 $A \sim B$ 。
- 若有 A 到 B 的单射函数, 则 $|A| \leq |B|$ 。
- 若有 A 到 B 的单射函数, 但无双射函数, 则 $|A| < |B|$ 。

常见等价类

- $N \sim Z \sim Q \sim N \times N = \aleph_0$

- $R \sim [0, 1] \sim (0, 1) = \aleph$