

# 关系

## 笛卡尔积

两个集合A和B的笛卡尔积，是序偶(a, b)的集合，其中

$$a \in A, b \in B$$

，记作： $A \times B$

- 若 $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ 则：  
 $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
- 笛卡尔积 $A \times B$ 的子集 $R$ 称为集合A到集合B的关系

## 笛卡尔积与关系

给定任意集合A和B，若 $R \subseteq A \times B$ ，则称R为从A到B的**二元关系**。（当 $A = B$ 时，称R为A上的二元关系）

**即：关系是笛卡尔积的子集。**

若 $(a, b) \in R$ ,则：

- $aRb$ 或 $R(a, b)$ 或 $(a, b) \in R$

## 关系的说明

- $aRb$ : 表示 $(a, b) \in R$ , 即a对b有关系R
- $a \not R b$ : 表示 $(a, b) \notin R$ , 即a对b无关系R

## 计算

若 $|A| = m, |B| = n$ ,则 $|A \times B| = mn$ ，则A到B的不同的二元关系共有 $2^{mn}$

## 特殊关系

给定任意集合A和B,

- 若 $R = \emptyset$ ,则称R为A到B上的空关系

- 若  $R = A \times B$ , 则称  $R$  为  $A$  到  $B$  上的全域关系
- 若  $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$ , 则称  $R$  为  $A$  上的恒等关系
- 令  $A \subseteq Z, R = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a|b\}$ , 称  $R$  为  $A$  上的整除关系, 记作  $D_A$

## 关系的表示方法

- **关系矩阵**:  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  到  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  的任意关系  $R$  的关系矩阵为  $M_R = [m_{ij}]_{n \times m}$ , 其中: (注意行列关系)

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (x, y) \in R \\ 0, & (x, y) \notin R \end{cases}$$

其中:

- 空关系的关系矩阵为全0矩阵。
- 全域关系的关系矩阵为全1矩阵。
- 恒等关系的关系举证为单位矩阵。
- **关系图** (有向图)  
若  $(a_i, b_j) \in R$ , 则从  $a_i$  到  $b_j$  画一条有向边。

## 关系的性质

1. **自反性**:  $\forall x(x \in A \rightarrow xRx)$  或  $\forall x(x \in A \rightarrow (x, x) \in R)$

- 关系矩阵的主对角线全为1
- 关系图的每个顶点都有自回环
- **充要条件**:  $I_A \subseteq R$ , 其中  $I_A$  为  $A$  上的恒等关系

2. **反自反性**:  $\forall x(x \in A \rightarrow (x, x) \notin R)$

- 关系矩阵的主对角线全为0
- 关系图的每个顶点均没有自回环
- **充要条件**:  $I_A \cap R = \emptyset$ , 其中  $I_A$  为  $A$  上的恒等关系

3. **对称性**:  $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$

- 关系矩阵是对称矩阵
- 关系图中任两个顶点之间若有边, 则必有两条方向相反的边。

4. **反对称性**:  $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y)$

- 关系矩阵中关于主对角线对称的任意两个元素至多有一个1
- 关系图中任两个顶点间至多有一个方向的边

5. **传递性**:  $\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R)$

- 关系矩阵  $[r_{ij}]_{n \times n}$  中, 对  $\forall i \forall j \forall k$  有, 若  $r_{ik} = 1$  且  $r_{kj} = 1$ , 则  $r_{ij} = 1$ 。
- 关系图中, 任意一条长度为2的路径都有从其起始顶点到终止顶点的边。

## 注意点

- 空集上的关系只有空关系一个, 该空关系既是自反的也是反自反的。
- 对称性和反对称性可同时满足

## 关系的运算

1. **复合 (合成) 运算**:  $R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b (b \in B \wedge aRb \wedge bSc)\}$

- $\emptyset \circ R = R \circ \emptyset = \emptyset$
- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
- $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
- $R \circ I_A = I_A \circ R = R$
- 矩阵表示: 由  $M_R = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $M_T = (b_{ij})_{n \times p}$ , 则:  $M_{R \circ T} = M_R \circ M_T$ , 其中  $M_{R \circ T} = (c_{ij})_{m \times p}$ ,  $c_{ij} = \bigvee_{k=1}^n (a_{ik} \wedge b_{kj})$  (矩阵乘法)

1. **幂运算**:  $R^0 = I_A, R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$

- 一般地, 对于  $A$  上的关系  $R$ , 有:  $R^{2k+1} = R^1, R^{2k} = R^2$
- $R^m \circ R^n = R^{m+n}, (R^m)^n = R^{mn}$
- 若集合  $A$  是包含  $n$  个元素的有限集合,  $R$  是  $A$  上的关系, 则:  $\exists i, j \in N, R^i = R^j$

2. **逆运算**:  $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
- $(R^{-1})^{-1} = R, (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}, (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}, (R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}, \overline{R^{-1}} = \overline{R}^{-1}$

# 闭包运算

添加一些序列来改造 $R$ ，得到新的关系 $R_1$ ，使得 $R_1$ 具有一些 $R$ 不具有的性质。需要满足的条件：**1.包含，2.满足性质，3.最小**

1. **自反闭包**：设 $R \subseteq A \times A$ ，则 $r(R) = R \cup I_A$
2. **对称闭包**：设 $R \subseteq A \times A$ ，则 $s(R) = R \cup R^{-1}$
3. **传递闭包**：设 $R \subseteq A \times A$ 且 $|A| = n \geq 1$ ，则 $t(R) = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$

## Warshall算法

用于计算传递闭包： $W_k[i, j] = W_{k-1}[i, j] \vee (W_{k-1}[i, k] \wedge W_{k-1}[k, j])$ 。

口诀：对 $k-1$ 的矩阵，取 $k$ 行为1的列，取 $k$ 列为1的行，将行列交点的0变为1。

## 闭包的性质

- 设 $R$ 是集合 $A$ 上的二元关系：
  - $R$ 是自反的  $\leftrightarrow I_A \subseteq R$
  - $R$ 是反自反的  $\leftrightarrow R \cap I_A = \emptyset$
  - $R$ 是对称的  $\leftrightarrow R = R^{-1}$
  - $R$ 是反对称的  $\leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
  - $R$ 是传递的  $\leftrightarrow R^2 \subseteq R$
- 若 $R \subseteq A \times A$ ，则
  - $r(s(R)) = s(r(R))$
  - $r(t(R)) = t(r(R))$
  - $s(t(R)) \subseteq t(s(R))$

## 关系与有向图

### 相关概念

- **出度**：发出多少条边。
- **入度**：多少条边进来。
- **路径长度**：一条边或多条边相连的序列。其中长度指单位边的个数。
- **环或回路**：在**同一顶点**开始和结束的长度大于等于1的路径。

## 幂运算与路径长度

- $R$ 的 $n$ 次幂 $R^n$ 表示在关系 $R$ 中存在从 $x$ 到 $y$ 的长度为 $n$ 的一条路径。
- $R^\infty$ 意指 $R$ 中存在从 $x$ 到 $y$ 的某条道路，也称为 $R$ 的**联通关系**。

## 等价关系

若 $R$ 是自反的、对称的和传递的，则称 $R$ 为 $A$ 上的**等价关系**

- 若 $(a, b) \in R$ ，称 $a$ 等价 $b$ ，记为 $a \sim b$ 。
- 由于 $R$ 具有对称性，因此等价具有交换性。
- 证明等价性，需要把自反性、对称性和传递性都进行证明。

## 等价类

设 $R$ 为非空集合 $A$ 上的等价关系，对 $\forall a \in A$ ，令 $[a]_R = \{x | x \in A \wedge aRx\}$ ，称 $[a]_R$ 为 $a$ 关于 $R$ 的**等价类**

- $a$ 的等价类是集合 $A$ 中**所有与 $a$ 等价的元素构成的集合**
- 性质：
  - $[a]_R \neq \emptyset$
  - 若 $(a, b) \in R$ ，则： $[a]_R = [b]_R$ ，即等价的元素的等价类相同。
  - 若 $(a, b) \notin R$ ，则： $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ ，即不等价的元素的等价类不相交。
  - $\bigcup_{i=1}^n [a_i]_R = A$ ，即所有元素的等价类的并为 $A$

## 商集

以 $R$ 的所有等价类作为元素的集合称为 $A$ 关于 $R$ 的**商集**，记作 $A/R$

- $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$

## 划分

设 $A$ 为非空集合，若 $A$ 的子集簇 $\pi (\pi \subseteq P(A))$ 满足：

- $\emptyset \notin \pi$  (划分块不能为空)
- $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$  (不同划分块不相交)
- 所有的划分块的并集为 $A$

## 等价、商集与划分的关系

- 若 $R$ 为 $A$ 上的一个等价关系，则对应 $R$ 的商集 $A/R$ 为 $A$ 的一个划分。
- 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $A$ 的任一划分，将每一个划分块看作一个等价类，则有 $R = \bigcup_{i=1}^n (A_i \times A_i)$