

# 半群

## 前提概念

### 运算

- 函数  $f : A^n \rightarrow B$  被称为从  $A$  到  $B$  的  $n$  元运算。
- 运算也是一种函数，因此有封闭性、唯一性。

### 二元运算的性质

结合律、交换律、幂等律（可能具有的性质）

## 代数系统

定义：

- 一个非空集合  $S$
- 配备一个或多个运算
- 且  $S$  对这些运算封闭

记作  $(S, *)$ ，如  $(Z, +)$

### 运算表

对于有限集合  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  上的二元运算  $*$ ，其运算表是一个  $n \times n$  的表格。其第  $i$  行第  $j$  列表示  $a_i * a_j$  的结果。

### 单位元

对于任意的  $x \in S$ ，都有  $e * x = x * e = x$ 。

记法：通常记为  $1_S$ 。

## 半群

**半群公理：** 结合律

**子半群：** 设  $(S, *)$  为一半群，且  $T \subseteq S$ 。若  $T$  对运算  $*$  封闭，则  $(T, *)$  本身也构成半群，称为  $(S, *)$  的

子半群。

## 么半群

**么半群公理**：结合律、单位元

**子么半群**：设 $(S, *)$ 为一么半群，其单位元为 $e$ ，且 $T \subseteq S$ 。若 $T$ 对运算 $*$ 封闭且 $e \in T$ ，则 $(T, *)$ 本身也构成么半群，称为 $(S, *)$ 的子么半群。（单位元要一致）

## 半群之间的关系

### 同构

半群 $(S, +)$ 与 $(T, *)$ 同构，记作 $S \cong T$ 。

当且仅当：

- 存在一个**双射函数** $f : S \rightarrow T$ ，满足：
- 对任意的 $x, y \in S$ ，都有 $f(x + y) = f(x) * f(y)$

同构是一种**等价关系**，满足自反性、对称性、传递性。

### 同态

半群 $(S, +)$ 与 $(T, *)$ 同态，记作 $S \sim T$ 。

当且仅当：

- 存在映射 $f : S \rightarrow T$ ，满足：
- 对任意的 $x, y \in S$ ，都有 $f(x + y) = f(x) * f(y)$

若 $f$ 是满射，则称 $T$ 是 $S$ 的**同态像**

### 同态像与系统性质

已知 $f : G_1 \rightarrow G_2$ 是一个同态映射，且 $G_2$ 为 $G_1$ 的同态像。

- 结合性：若 $G_1$ 满足结合律，则 $G_2$ 必定也满足结合律。
- 交换性：若 $G_1$ 满足交换律，则 $G_2$ 必定也满足交换律。
- 单位元性质：若 $G_1$ 含有单位元 $e$ ，则 $G_2$ 也必定存在单位元 $e$ 。
- 若 $G'_1$ 是 $G_1$ 的子半群，则 $G'_1$ 在 $f$ 下的同态像必为 $G_2$ 的子半群。

## 半群的直积

若 $(S, +)$ 和 $(T, *)$ 为半群，则 $(S \times T, \otimes)$ 也构成半群，称为**半群的直积**。

其中 $\otimes$ 表示 $(s_1, t_1) \otimes (s_2, t_2) = (s_1 + s_2, t_1 * t_2)$

## 半群的同余关系

半群 $(S, *)$ 上的等价关系 $R$ 称为同余，满足 $aRa' \wedge bRb' \Rightarrow (a * b)R(a' * b')$

## 商半群

设 $R$ 是半群 $(S, *)$ 上的同余关系。 $S/R$ 是商集，即所有等价类构成的集合。

在 $S/R$ 上定义 $\otimes: S/R \otimes S/R \rightarrow S/R$ 为 $[a] \otimes [b] = [a * b]$ 。此时 $(S/R, \otimes)$ 构成一个半群，称为商半群。

## 同态基本定理

给定一个同态映射 $f: (S, \cdot) \rightarrow (T, *)$ ，它必然诱导出一个同余关系 $R$ 在 $S$ 上。

即有 $f_R: (S, \cdot) \rightarrow (S/R, \otimes)$ ，以及 $g: (S/R, \otimes) \rightarrow (T, *)$ ，并且 $f = g \circ f_R$