

# 图模型与应用

---

## 有向图与连通性

### 强连通性

对于任意两个顶点  $u, v \in V$ ，都存在从  $u$  到  $v$  的路径也存在  $v$  到  $u$  的路径。 **强连通分量**：在  $G$  中能实现强连通的极大子图。

### 性质

- 表示任意两个顶点之间都有有向路径互相到达。
- 是顶点集  $V$  上的等价关系
- 有向图的强连通分量的划分具有**唯一性**

### 弱连通性

将边当作是无向边，得到的无向图是一个连通图。 **弱连通分量**：在  $G$  中能实现弱连通的子图我们称为弱连通分量

### 性质

- 在弱连通图中，至少有一条路径能够连接任意两个顶点
- 如果图是强连通的，那么它必然是弱连通的。

## 运输网络

### 定义

一个有序对  $(G, k)$ ，其中：

- $G$  是一个弱连通的有向图，且不包含环
- $k$  是定义在  $E_G$  上的非负实数函数
- 在  $V_G$  中有两个特殊的顶点  $S$  和  $D$ ， $S$  的入度为 0，称为源点； $D$  的出度为 0，称为汇点。

### 流与割

对运输网络进行割，**最小割即最大流**

### 标记算法

1. 将所有流的值置为 0
2.
  1. 确定  $N_1$  (与源点通过正过剩容量边相连的所有节点)
  2. 标记所有  $N_1$  节点。  $[E_j, 1]$ ，其中  $E_j$  为  $(1, j)$  的过剩容量， $1$  即节点  $N_1$ 。
3.
  1. 基于  $N_1$  中编号最小的节点  $j$ ，确定  $N_2(j)$
  2. 按以下规则为  $N_2(j)$  中的节点添加标记。  $[E_k, j]$ ，其中  $E_k$  为  $\min\{E_j, (j, k)\}$ ，
  3. 对  $N_1$  中的所有节点  $j$  重复上述操作。（只标记未标记的）
4. 重复步骤二，直至：

1. 汇点已被标记(同步更新边 $e_{ij}$ )
2. 汇点未被标记, 且根据标记规则已无节点可被标记 (算法结束)

## 匹配问题

给定两个有限集合 $A$ 与 $B$ , 以及从 $A$ 到 $B$ 的关系 $R$ 。匹配函数 $M$ 是从 $A$ 的一个子集到 $B$ 的一个子集的一对一映射。

- 若 $M(a) = b$ , 则称元素 $a$ 与 $b$ 匹配。
- 当 $M \subseteq R$ 时 (即若 $M(a) = b$ 时, 则必有 $aRb$ ), 称 $M$ 与 $R$ 兼容。
- 若匹配 $M$ 在给定关系 $R$ 下无法通过新增任何边来拓展, 则称 $M$ 是一个极大匹配。
- 若匹配 $M$ 覆盖集合 $A$ 中的所有元素, 则称 $M$ 是一个完全匹配。

注: 所有边的容量为1

## 霍尔婚姻定理

设 $R$ 是一个从 $A$ 到 $B$ 的二元关系, 则存在一个完全匹配 $M$ 当且仅当对于任意子集 $X \subseteq A$ , 均有 $|X| \leq |R(X)|$ 。

## 图的色数

正常着色: 任意相邻顶点颜色均不相同。色数: 能使图 $G$ 实现正常着色的最小颜色数, 称为图 $G$ 的色数, 记作 $\chi(G)$ 。

性质:

- 对于任意图 $G$ , 其色数满足 $\chi(G) \leq |V(G)|$ 。当且仅当 $G$ 为完全图时, 等号成立。
- 图 $G$ 的色数等于其最大连通分量的色数。

## 实例

- $\chi(K_n) = n$
- 如果图 $G$ 是一个环, 那么
  - 如果 $|V(G)| = 2k$ , 则 $\chi(G) = 2$
  - 如果 $|V(G)| = 2k + 1$ , 则 $\chi(G) = 3$
- 如果图 $G$ 是一个轮图, 那么
  - 如果 $|V(G)| = 2k$ , 则 $\chi(G) = 4$
  - 如果 $|V(G)| = 2k + 1$ , 则 $\chi(G) = 3$

## 二分图

图 $G$ 的顶点集可以划分为两个子集, 使得图中的所有边都连接这两个子集中不同的顶点。当且仅当图 $G$ 中不存在奇数长度的环时,  $G$ 是一个二分图。并且当且仅当图 $G$ 为一个二分图时, 图的色数 $\chi(G) = 2$  (不是离散图)。

## 色多项式

给定一个图 $G$ 和颜色集合 $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ , 图 $G$ 的不同着色方式的数量是关于 $n$ 的一个函数。称为色多项式。

## 递推公式

$P_G(x) = P_{G_e}(x) - P_{G^e}(x)$  (删边减合边) 其中  $G_e = G - \{e\}$ ,  $G^e$  是图  $G$  中合并边  $e$  所得到的图。

## 平面图

如果能把图  $G$  的所有节点和边都画到平面上, 且任意两边除了端点外没有其他交点, 则  $G$  是一个**平面图**  
**约当曲线定理:**

- 一条闭合曲线  $C$  将平面分成两个部分, 内部和外部。
- 如果一条直线连接分别内部和外部两个顶点, 则该直线必定与曲线  $C$  相交。

## 对偶图

给定一个平面图  $G$ , 其**对偶图**  $G^*$  的构造方式为:

- 顶点:  $G^*$  的每个顶点对于  $G$  的一个面
- 边: 若  $G$  中的两个面有公共边, 则在  $G^*$  中用一条边连接两个顶点。

## 四色定理